استخدام طريقة خوارزمية تطوير مولد قطع المستوي(MSCPA) في إيجاد الحل العددي الأمثل لمسائل البرمجة الخطية غير المقيدة

إسراء هادي حسن

المستخلص

هنالك عدة طرق لحل مسائل البرمجة الخطية غير المقيدة أي المسائل ذات المتغيرات غير المقيدة يتم من خلال هذه الطرق الحصول على الحل الأمثل للمسألة وغالبا ما تكون قيم المتغيرات الناتجة أعداد كسرية ،لكن إذا وجدت شروط في المسألة تتطلب أن تكون قيم المتغيرات الناتجة جميعها أعداد صحيحة عندها سوف نلجأ إلى استخدام إحدى الطرق التي نحصل من خلالها على الحل العددي الأمثل للمسألة وفي بحثنا هذا سيتم استخدام طريقة خوارزمية تطوير مولد قطع المستوي (MSCPA) لحل مسائل البرمجة الخطية العددية الصحيحة لإيجاد الحل العددي لمسائل البرمجة الخطية غير المقيدة هذا بعد أن نلقي نظرة على مفهوم البرمجة الخطية غير المقيدة والبرمجة بالأعداد الصحيحة.

* الجامعة التكنولوجية/ قسم العلوم التطبيقية

المقدمة [2],[3],[8]

تعد البرمجة الخطية من الأساليب التي تستخدم كثيراً في البحوث العلمية والعملية وتعتبر إحدى الوسائل المهمة لحل كثير من المشاكل الواقعية في مجالي الصناعة والتخطيط،حيث تُستخدم لإيجاد أعظم أو أدنى قيمة لدالة خطية وفق شروط أو ضوابط خطية معينة.وعند صياغة أي مسألة من مسائل البرمجة الخطية قد تظهر حالات تتطلب استعمال متغيرات غير مقيدة بشرط عدم السالبية تدعى عندها بمسائل البرمجة الخطية غير المقيدة **كما هو معتاد في مسائل البرمجة الخطية كقياس مستوى الخزين أو ألإنتاج في مصنع أو ما شابه ذلك من كميات قابلة للزيادة أو النقصان.**

إن اغلب الطرق التي وضعت لمعالجة هذا النوع من المشاكل كانت ذات كفاءات متفاوتة بخوارزمياتها العلمية من جهة ومن ناحية الوقت المطلوب لمعالجة المشكلة من جهة أخرى ويبرز هذا التفاوت كلما كبر حجم المشكلة حيث يعبر عادتاً عن المتغير الحر أو المتغير غير المقيد كفرق بين متغيرين غير سالبين أو بصيغ أخرى متقاربة، إن أول من استخدم هذه الوسيلة في البرمجة الخطية هو العالم Gale في بحثه المعنون (البرمجة الخطية ونظرية المباراة) ثم أعقبه العالم Orden باستخدام الفروق غير السالبة في البرمجة الخطية غير المقيدة. والآن سنوضح إحدى هذه الطرق وهي الطريقة الكلاسيكية لحل مسائل البرمجة الخطية غير المقيدة.

1- الطريقة الكلاسيكية لحل مسائل البرمجة الخطية غير المقيدة . [2],[5],[6]

وهي أسلوب للتعبير عن المتغير غير المقيد x_i بدلالة متغيرين غير سالبين هما $x_i^{'}, x_i^{''}$ بالشكل التالي:

$$x_i = x_i^{'} - x_i^{''}$$
$$x_i^{'}, x_i^{''} \geq 0 \qquad \text{لكل قيم } i$$

وهذا التعويض يجب أن يطبق على دالة الهدف وجميع قيود المسألة، ولإيجاد الحل الأمثل للمسألة بدلالة المتغيرين $x_i^{'} , x_i^{''}$ نستخدم طرق حل مسائل البرمجة الخطية ومنها طريقة السمبلكس المبسطة عندها سيكون واحد على الأقل من هذين المتغيرين موجب وليس شرط كلاهما . فإذا كانت قيمة $x_i^{'} > 0$ و $x_i^{''} = 0$ وبالعكس في هذه الحالة يكون المتغير x_i مهمل وفائض(slack and surplus) حيث إن المتغير المهمل هو الذي يحمل القيمة الموجبة أما الفائض فهو المتغير الصفري.

ولتوضيح استخدام هذه الطريقة نستعرض المثال التالي:

مثال:

$$MinZ = 3x_1 - 6x_2 - 4x_3$$

Sub. To

$$-x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 7$$

$$-x_1 + 2x_2 + 6x_3 = 8$$

x_1 **متغير غير مقيد**, $x_2 , x_3 \geq 0$

الحل:

بما إن قيود المسألة تحمل علامة مساواة لذلك سنحول كل قيد إلى قيدين أحدهما يحمل علامة أكبر أو يساوي والثاني علامة أقل أو يساوي وبذلك سيصبح للمسألة أربع قيود كما مبين أدناه:

$$MinZ = 3x_1 - 6x_2 - 4x_3$$

Sub. To

$$-x_1 + 4x_2 + 3x_3 \le 7$$
$$-x_1 + 4x_2 + 3x_3 \ge 7$$
$$-x_1 + 2x_2 + 6x_3 \le 8$$
$$-x_1 + 2x_2 + 6x_3 \ge 8$$

x_1 متغير غير مقيد , $x_2, x_3 \ge 0$

ألان سوف نوحد علامة القيود ليصبح النموذج بالشكل التالي:

$$MinZ = 3x_1 - 6x_2 - 4x_3$$
$$-x_1 + 4x_2 + 3x_3 \le 7$$
$$x_1 - 4x_2 - 3x_3 \le -7$$
$$-x_1 + 2x_2 + 6x_3 \le 8$$
$$x_1 - 2x_2 - 6x_3 \le -8$$

x_1 متغير غير مقيد , $x_2, x_3 \ge 0$

بما إن x_1 هو المتغير غير المقيد بشرط عدم السالبية في المسألة لذلك سوف يتم تعويضه كفرق بين متغيرين x_1', x_1'' وبذلك سيصبح النموذج بالشكل التالي:

$$MinZ = 3(x_1' - x_1'') - 6x_2 - 4x_3$$

$$-(x_1^{'}-x_1^{''})+4x_2+3x_3\le 7$$
$$(x_1^{'}-x_1^{''})-4x_2-3x_3\le -7$$
$$-(x_1^{'}-x_1^{''})+2x_2+6x_3\le 8$$
$$(x_1^{'}-x_1^{''})-2x_2-6x_3\le -8$$
$$x_1^{'},x_1^{''},x_2,x_3\ge 0$$

نحول المسألة إلى الصيغة القياسية بإضافة المتغيرات المهملة(Si) لكي يتم حلها باستخدام طريقة السمبلكس:

$$MinZ-3(x_1^{'}-x_1^{''})+6x_2+4x_3=0$$
$$-(x_1^{'}-x_1^{''})+4x_2+3x_3+s_1=7$$
$$(x_1^{'}-x_1^{''})-4x_2-3x_3+s_2=-7$$
$$-(x_1^{'}-x_1^{''})+2x_2+6x_3+s_3=8$$
$$(x_1^{'}-x_1^{''})-2x_2-6x_3+s_4=-8$$
$$x_1^{'},x_1^{''},x_2,x_3,s_1,s_2,s_3,s_4\ge 0$$

وبذلك سيكون جدول الحل الابتدائي للمسألة كما مبين:

جدول(1)

	B	$x_1^{'}$	$x_1^{''}$	**x_2**	**x_3**	**S_1**	**S_2**	**S_3**	**S_4**
Z	**0**	**-3**	**3**	**6**	**4**	**0**	**0**	**0**	**0**
S_1	**7**	**-1**	**1**	**4**	**3**	**1**	**0**	**0**	**0**
S_2	**-7**	**1**	**-1**	**-4**	**-3**	**0**	**1**	**0**	**0**
S_3	**8**	**-1**	**1**	**2**	**6**	**0**	**0**	**1**	**0**
S_4	**-8**	**1**	**-1**	**-2**	**-6**	**0**	**0**	**0**	**1**

حيث تم التوصل إلى الحل الأمثل للمسألة في الجدول الرابع وكما مبين أدناه:

جدول(4)

	B	$x_1^{'}$	$x_1^{''}$	x_2	x_3	S_1	S_2	S_3	S_4
Z	**-19.33**	**0**	**0**	**-9.33**	**0**	**-4.67**	**0**	**0**	**-1.67**
$x_1^{'}$	**6**	**-1**	**1**	**6**	**0**	**2**	**0**	**0**	**1**
S_2	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**1**	**1**	**0**	**0**
S_3	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**1**	**1**
x_3	**0.33**	**0**	**0**	**-0.67**	**1**	**-0.33**	**0**	**0**	**-0.33**

أي إن الحل الأمثل للمسألة هو:

Min Z= -19.33

$x_1 = x_1^{'} - x_1^{''} = 0 - 6 = -6$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0.33$

2- البرمجة بالأعداد الصحيحة[1],[9],[10]

يمكن أن نعبر عن مسألة البرمجة الخطية بمجموعة من القيود الخطية والتي تكون على شكل متباينات مع دالة هدف خطية.إن مسائل البرمجة الخطية التي تشترط أن تكون جميع متغيرات المسألة الناتجة ذات قيم عددية صحيحة تدعى بمسائل البرمجة العددية أو البرمجة بالأعداد الصحيحة **وهنالك عدة طرق لحل مثل هذه المسائل منها طريقة قطع المستوي لكومري وطريقة خوارزمية البداية المتقدمة(ASA) حيث يتم في جميع هذه الطرق إيجاد الحل غير العددي أولا بطريقة السمبلكس والذي يستغرق عدة جداول بعدها يتم استخدام خوارزمية تلك الطرق لإيجاد الحل العددي الأمثل للمسألة ولعدم أتساع المجال لذكر تلك الطرق ممكن الرجوع إلى المصادر[1,4,6] عند الحاجة إليها، أما موضوع البحث هو إيجاد الحل العددي الأمثل لمسائل البرمجة الخطية غير المقيدة باستخدام طريقة خوارزمية تطوير مولد قطع المستوي(MSCPA).**

2-1 طريقة خوارزمية تطوير مولد قطع المستوي MSCPA [1],[4],[7]

كما ذكرنا أعلاه انه توجد عدة طرق لحل مسائل البرمجة الخطية العددية منها طريقة قطع كومري وغيرها من الطرق التي يمكن من خلالها الوصول إلى الحل العددي الأمثل للمسألة ،لكن طريقة خوارزمية تطوير مولد قطع المستوي (MSCPA) تعتبر من الطرق المتقدمة لقطع المستوي بما فيها من سهولة بأجراء الحسابات والتنقل بجداول الحل بهدف الوصول إلى الحل العددي الأمثل للمسألة ،فإذا فرضنا انه لدينا النموذج التالي للمسألة :

$$\textbf{Max Z=} \sum_{j=1}^{n} cjxj$$

$$\textbf{Sub. To} \quad \sum_{j=1}^{n} aij.xj \le bi \qquad \textbf{i=1,2,...m} \quad , \quad \textbf{j=1,2,...n}$$

$$xj \ \ge \ 0$$

$xj\,,cj\,,aij\,,bi$ **(جميعها متغيرات عددية صحيحة)**

m:عدد قيود المسألة.

n :عدد متغيرات المسألة.

فلإيجاد الحل العددي الأمثل للنموذج أعلاه نتبع الخوارزمية التالية:

<u>2-2 خوارزمية طريقة تطوير مولد قطع المستوي MSCPA</u>

(1) نحول مسألة البرمجة الخطية إلى الصيغة القياسية وذلك بتحويل المتباينات إلى معادلات بإضافة المتغيرات المهملة (Si) إلى قيود المسألة بمعدل متغير واحد لكل قيد ، بعدها نكون جدول الحل الابتدائي للمسألة ثم نذهب إلى الخطوة (2).

(2) يتم اختيار العمود المولد (عمود المتغير الداخل) والذي يحمل أكبر أشارة سالبة في حالة التعظيم(MaxZ) وأكبر قيمة موجبة في حالة التصغير(MinZ)،إذا لم يتحقق ذلك فالحل الموجود هو الحل الأمثل وبذلك نتوقف، وبخلافه نذهب للخطوة(3).

(3) يتم اختيار السطر المولد(سطر المتغير الخارج) والذي يمثل أقل قيمة ناتجة من قسمة القيم الموجبة المرافقة المتغيرات (Si) في عمود الحلول الأساسية (B) على القيم الموجبة المرافقة في عمود المتغير الداخل ،إن العنصر الذي ينتج من تقاطع العمود المولد مع السطر المولد يسمى بمحور الارتكاز، بعدها بقسمة عناصر السطر المولد على قيمة محور الارتكاز وأخذ دالة العدد الصحيح لكل مقدار ينتج القطع الأول(Sc_1) ،أما العنصر الناتج من تقاطع العمود المولد مع سطر القطع المولد يسمى بعنصر المحور ،وبأجراء الحسابات التالية على الجدول الأول يتم الوصول إلى جدول جديد وهي كما يلي :

أ- إذا كانت قيمة عنصر المحور في سطر القطع المولد تساوي (1) فأن قيم العمود المولد في الجدول الجديد تكون نفس القيم القديمة مضروبة (1-).أما باقي قيم الجدول الجديد فتحسب من العلاقة التالية:

$$a(i,j)_{new} = a(i,j) - a(r,j) * a(i,c)$$

$$i = 1,2,\ldots,n+m+1$$

$$j = 1,2,\ldots,n+1$$

r : يمثل رقم سطر القطع المولد(r=n+m+2).

c : يمثل رقم العمود المولد في الجدول.

n : يمثل عدد متغيرات المسألة.

m : يمثل عدد قيود المسألة.

ب-أما أذا كانت قيمة عنصر المحور في سطر القطع المولد تساوي (1-) فأن قيم العمود المولد في الجدول الجديد تكون نفس القيم القديمة في الجدول السابق أما باقي قيم الجدول الجديد نحصل عليها باستخدام العلاقة أعلاه .

نلاحظ الآن قيم دالـة الهـدف الناتجـة فـي الجـدول الجديـد فـإذا كانـت ($0 \geq c_j$) فـي حالـة التعظيم أو($0 \leq c_j$) في حالة التصغير نتوقف لأننـا قد وصلنا إلـى الحل الأمثل للمسألة ، كذلك في حالة تعذر اختيار عمود للمتغير الداخل ،نتوقف ويكون الحل النـاتج فـي الجدول الأخير هو حل مقبول للمسألة وليس أمثل لوجود قيمة سالبة ،وبخلاف ذلك نعود للخطوة (2).

3- أيجاد الحل العددي لمسائل البرمجة الخطية غير المقيدة . [1],[5],[6]

عندما تكون لدينا دالة هدف خطية وشروط في المسألة تتطلب كون الحل الناتج هو الحل العددي الأمثل للمسألة سوف نتبع الخطوات التالية لإيجاد ذلك الحل وهذا هو هدف البحث أي الحصول على الحل العددي الأمثل لمسائل البرمجة الخطية غير المقيدة.

3-1 خطوات إيجاد الحل العددي لمسائل البرمجة الخطية غير المقيدة.

(1) نحول المتغير الغير مقيد في دالـة الهـدف والقيـود للمسـألة إلـى متغيرين غير سـالبين كما مبين :

$$x_i = x_i^{'} - x_i^{''}$$
$$x_i^{'}, x_i^{''} \geq 0 \qquad \forall i$$

(2) تحـول المسـألة إلـى الصـيغة القياسـية بإضـافة المتغيـرات المهملـة(Si) بعـدها نطبـق خوارزميه طريقـة (MSCPA) مـع ملاحظـة قيـود المسألة فإذا كانـت (قيد واحد أو أكثر) المسألة من مضاعفات دالة الهدف فالأفضل أن نختار المتغير الداخل المرافق لأقل موجب في حالـة التصغير واقل سالب فـي حالـة التكبير وذلك للحصـول علـى الحل العددي الأمثل بأقل عدد من الجداول وفيما عداه نختار العكس ،ثم نستمر بأجراء الحسابات والتنقل من جدول إلى أخر لحين الوصول إلى الحل العددي الأمثل للمسألة.

(3) بعد الوصول إلى الحل الأمثل للمسألة نطرح قيم x_j'' من x_j' للحصول على قيم المتغيرات غير المقيدة للمسألة وبذلك نحصل على الحل العددي الأمثل لمسألة البرمجة الخطية غير المقيدة.

ولتوضيح هذه الخطوات نستعرض الأمثلة التالية:

مثال(1)

$$MinZ = 3x_1 - 2x_2 - 6x_3 - 14x_4$$
$$-x_1 + 0x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 7$$
$$-x_1 + x_2 + 2x_3 + 6x_4 = 8$$

x_1, x_2 متغيرات غير مقيدة

$x_3, x_4 \geq 0,\ x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4$ (متغيرات ذات قيم عددية صحيحة)

الحل:

بما إن كل من X_2, X_1 هي المتغيرات غير المقيدة في المسألة لذلك سوف نكتب كل منهما بالشكل التالي:

$$x_1 = x_1' - x_1'' \qquad , x_2 = x_2' - x_2''$$

وبتحويل علامة القيود تصبح المسألة بالشكل التالي:

$$MinZ = 3(x_1' - x_1'') - 2(x_2' - x_2'') - 6x_3 - 14x_4$$
$$-(x_1' - x_1'') + 0(x_2' - x_2'') + 4x_3 + 3x_4 \leq 7$$
$$(x_1' - x_1'') - 0(x_2' - x_2'') - 4x_3 - 3x_4 \leq -7$$
$$-(x_1' - x_1'') + (x_2' - x_2'') + 2x_3 + 6x_4 \leq 8$$
$$(x_1' - x_1'') - (x_2' - x_2'') - 2x_3 - 6x_4 \leq -8$$
$$x_1', x_1'', x_2', x_2'', x_3, x_4 \geq 0$$

$x_1^{'}, x_1^{''}, x_2^{'}, x_2^{''}, x_3, x_4$ **(متغيرات ذات قيم عددية صحيحة)**

بتحويل المسألة إلى الصيغة القياسية نحصل على النموذج التالي:

$$MinZ - 3(x_1^{'} - x_1^{''}) + 2(x_2^{'} - x_2^{''}) + 6x_3 + 14x_4 = 0$$

Sub.To

$$-(x_1^{'} - x_1^{''}) + 0(x_2^{'} - x_2^{''}) + 4x_3 + 3x_4 + s_1 = 7$$

$$(x_1^{'} - x_1^{''}) - 0(x_2^{'} - x_2^{''}) - 4x_3 - 3x_4 + s_2 = -7$$

$$-(x_1^{'} - x_1^{''}) + (x_2^{'} - x_2^{''}) + 2x_3 + 6x_4 + \quad + s_3 = 8$$

$$(x_1^{'} - x_1^{''}) - (x_2^{'} - x_2^{''}) - 2x_3 - 6x_4 + \quad + s_4 = -8$$

$$x_1^{'}, x_1^{''}, x_2, x_3, x_4, s_1, s_2, s_3, s_4 \geq 0$$

$x_1^{'}, x_1^{''}, x_2^{'}, x_2^{''}, x_3, x_4$ **(متغيرات ذات قيم عددية صحيحة)**

وباستخدام جداول السمبلكس المعدل يتم وضع المسألة في جدول(1) كما مبين :

جدول(1)

	B	$x_1^{'}$	$x_1^{''}$	$x_2^{'}$	$x_2^{''}$	x_3	x_4
Z	**0**	**-3**	**3**	**2**	**-2**	**6**	**14**
$x_1^{'}$	**0**	**-1**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**
$x_1^{''}$	**0**	**0**	**-1**	**0**	**0**	**0**	**0**
$x_2^{'}$	**0**	**0**	**0**	**1**	**0**	**0**	**0**
$x_2^{''}$	**0**	**0**	**0**	**0**	**-1**	**0**	**0**
x_3	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**-1**	**0**
x_4	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**-1**
S_1	**7**	**-1**	**1**	**0**	**0**	**4**	**3**
S_2	**-7**	**1**	**-1**	**0**	**0**	**-4**	**-3**
S_3	**8**	**-1**	**1**	**1**	**-1**	**2**	**6**
S_4	**-8**	**1**	**-1**	**-1**	**1**	**-2**	**-6**

سنطبق الآن خوارزمية طريقة MSCPA على الجدول(1) حيث سنختار عمود المتغير x_4 كعمود للمتغير الداخل المرافق لأقل موجب وهو x_2' ، ويقسمة القيم الموجبة(Si) في العمود B على القيم الموجبة المرافقة في عمود المتغير الداخل وأخذ أقل ناتج قسمة نحدد سطر المتغير الخارج (السطر المولد) حيث سيكون المتغير S_3 هو المتغير الخارج وبذلك سيكون محور الارتكاز(1) ولاستخراج القطع الأول Sc_1 نقسم قيم السطر المولد S_3 على قيمة محور الارتكاز(1) مع اخذ دالة العدد الصحيح لكل مقدار ينتج بذلك القطع الأول Sc_1 وكما مبين أدناه :

Sc_1=**([8/1],[-1/1],[1/1],[1/1],[-1/1],[2/1],[6/1])=(8,-1,1,1,-1,2,6)**

حيث[.] تمثل دالة العدد الصحيح، وبذلك سيصبح جدول (1) كالتالي:

جدول(1)

	B	x_1'	x_1''	x_2'	x_2''	x_3	x_4
Z	**0**	**-3**	**3**	**2**	**-2**	**6**	**14**
x_1'	**0**	**-1**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**
x_1''	**0**	**0**	**-1**	**0**	**0**	**0**	**0**
x_2'	**0**	**0**	**0**	**1**	**0**	**0**	**0**
x_2''	**0**	**0**	**0**	**0**	**-1**	**0**	**0**
x_3	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**-1**	**0**
x_4	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**-1**
S_1	**7**	**-1**	**1**	**0**	**0**	**4**	**3**
S_2	**-7**	**1**	**-1**	**0**	**0**	**-4**	**-3**
S_3	**8**	**-1**	**1**	**(1)**	**-1**	**2**	**6**
S_4	**-8**	**1**	**-1**	**-1**	**1**	**-2**	**-6**
Sc_1	**8**	**-1**	**1**	**(1)**	**-1**	**2**	**6**

بما أن قيمة عنصر المحور تساو ي(1) كما مبين في الجدول أعلاه لذلك فأن قيم عمود (x_2') في الجدول الجديد تكون نفس القيم مضروبة (-1) أما باقي قيم الجدول فتحسب من العلاقة التالية:

$$a(i,j)_{new} = a(i,j) - a(r,j) * a(i,c)$$

$$i = 1,2,\ldots,n+m+1$$

$$j = 1,2,\ldots,n+1$$

حيث أن c=4، r=12، n=6، m=4

فعلى سبيل المثال أن قيمة a(10,1) الجديدة في جدول(2) تكون:

$$a(10,1)_{new} = a(10,1) - a(12,1) * a(10,4) = 8 - 8*1 = 0$$

وبذلك ينتج جدول(2)كما يلي:

جدول(2)

	B	x_1'	x_1''	$Sc1$	x_2''	x_3	x_4
Z	-16	-1	1	-2	0	2	2
x_1'	0	1	0	0	0	0	0
x_1''	0	0	-1	0	0	0	0
x_2'	8	-1	1	1	-1	2	6
x_2''	0	0	0	0	-1	0	0
x_3	0	0	0	0	0	-1	0
x_4	0	0	0	0	0	0	-1
S_1	7	-1	(1)	0	0	4	3
S_2	-7	1	-1	0	0	-4	-3
S_3	0	0	0	-1	0	0	0
S_4	0	0	0	1	0	0	0
Sc_2	7	-1	(1)	0	0	4	3

نلاحظ إننا لم نحصل على الحل الأمثل في الجدول (2) لوجود قيم موجبة في صف دالة الهدف لذلك سنعود للخطوة (2) من خوارزمية طريقة (MSCPA) ونختار x_1'' عمود للمتغير الداخل و S_1 سطر للمتغير الخارج حيث ستكون قيمة محور الارتكاز(1) أيضا وبذلك سنحصل على القطع الثاني(Sc_2) وكما مبين في الجدول (2) أعلاه.وبأجراء نفس الحسابات السابقة على جدول(2)نحصل على جدول(3) كما مبين:

جدول(3)

	B	x_1'	$Sc2$	$Sc1$	x_2''	x_3	x_4
Z	-23	0	-1	-2	0	-2	-1
x_1'	0	-1	0	0	0	0	0
x_1''	7	-1	1	0	0	4	3
x_2'	1	0	-1	1	-1	-2	3
x_2''	0	0	0	0	-1	0	0
x_3	0	0	0	0	0	0	0
x_4	0	0	0	0	0	0	-1
S_1	0	0	-1	0	0	0	0
S_2	0	0	1	0	0	0	0
S_3	0	0	0	-1	0	0	0
S_4	0	0	0	1	0	0	0

نلاحظ في جدول (3) إننا قد حصلنا على الحل الأمثل للمسألة لكون $c_j \leq 0$.،وقيم عمود B جميعها موجبة لذلك فالحل الأمثل للمسألة هو:

Min Z=-23

$x_1 = x_1' - x_1'' = 0-7=-7$, $x_2 = 1$, $x_3=0$, $x_4=0$

بينما عند استخدام طريقة قطع كومري ممكن الوصول إلى نفس الحل بخمس جداول.

مثال (2):

$$MaxZ = 5x_1 + 6x_2$$

$$x_1 + 2x_2 = 5$$

$$-x_1 + 5x_2 \geq 3$$

x_1 متغير غير مقيد, $x_2 \geq 0$

x_1 , x_2 **(متغيرات ذات قيم عددية صحيحة)**

الحل:

إن المتغير x_1 هو المتغير الحر في المسألة لذلك سيكتب كحاصل فرق بين متغيرين، وبتحويل المسألة إلى الصيغة القياسية نحصل على النموذج التالي:

$$MaxZ - 5(x_1^{'} - x_1^{''}) - 6x_2 = 0$$

S.T

$$\begin{aligned} (x_1^{'} - x_1^{''}) + 2x_2 + S_1 \quad &= 5 \\ -(x_1^{'} - x_1^{''}) - 2x_2 \quad + S_2 \quad &= -5 \\ (x_1^{'} - x_1^{''}) - 5x_2 \quad + S_3 &= -3 \end{aligned}$$

$x_1^{'} , x_1^{''} , x_2$ **(متغيرات ذات قيم عددية صحيحة)**

باستخدام خوارزمية طريقة MSCPA يتم وضع المسألة في الجدول (1)كما مبين :

جدول(1)

	B	$x_1^{'}$	$x_1^{''}$	x_2
Z	0	-5	5	-6
$x_1^{'}$	0	-1	0	0
$x_1^{''}$	0	0	-1	0
x_2	0	0	0	-1
S_1	5	1	-1	(2)
S_2	-5	-1	1	-2
S_3	-3	1	-1	-5
Sc_1	2	0	-1	(1)

سنختار العمود المرافق لأكبر سالب كعمود للمتغير الداخل والذي يمثل المتغير x_2 وبقسمة قيم Si الموجبة في العمود B على قيم Siالمرافقة في عمود المتغير الداخل و اختيار اقل ناتج قسمة يتم الحصول على سطر المتغير الخارج والذي يمثله المتغير S_1 وباستخراج القطع الأولSc_1وا إجراء الحسابات يمكن التوصل للحل الأمثل للمسألة في الجدول الرابع وكما مبين :

جدول(4)

	B	$x_1^{'}$	$x_1^{''}$	x_2
Z	17	1	0	4
$x_1^{'}$	1	-1	-1	2
$x_1^{''}$	0	0	-1	0
x_2	2	1	0	-1
S_1	0	-1	0	0
S_2	0	1	0	0
S_3	6	6	0	-7

أي إن الحل الأمثل للمسألة هو:

Max Z=17, $x_1 = x_1^{'} - x_1^{''} = 1 - 0 = 1 \ , \ x_2 = 2$

مثال(3)

$$MaxZ = 2x_1 + 3x_2 + 5x_3$$

Sub. To

$$x_1 + x_2 - x_3 \geq -5$$

$$-6x_1 + 7x_2 - 9x_3 \leq 4$$

$$x_1 + x_2 + 4x_3 = 10$$

$x_1, x_2 \geq 0$, x_3 **متغير غير مقيدة**

x_1 , x_2 , x_3 **(متغيرات ذات قيم عددية صحيحة)**

الحل:

عند تطبيق خوارزمية طريقة(MSCPA) على هذه المسألة يكون جدول الحل الابتدائي بالشكل التالي:

جدول(1)

	B	x_1	x_2	x'_3	x''_3
Z	**0**	**-2**	**-3**	**-5**	**5**
x_1	**0**	**-1**	**0**	**0**	**0**
x_2	**0**	**0**	**-1**	**0**	**0**
x'_3	**0**	**0**	**0**	**-1**	**0**
x''_3	**0**	**0**	**0**	**0**	**-1**
S_1	**5**	**-1**	**-1**	**1**	**-1**
S_2	**4**	**-6**	**7**	**-9**	**9**
S_3	**10**	**1**	**1**	**4**	**-4**
S_4	**-10**	**-1**	**-1**	**-4**	**4**

في هذه المسألة يتم الحصول على الحل العددي في الجدول الخامس ولكن هذا الحل يعتبر مقبول وليس الأمثل لوجود قيمة سالبة في صف دالـة الهدف وعند اختيارها كعمود للمتغير الداخل لا يحصل تحسين لقيمة دالـة الهدف وبما أن هذا الحل يحقق شرط دالـة الهدف والقيود للمسألة لذلك يعتبر مقبول وهو كالأتـي:

MaxZ=16

$x_1=0$, $x_2=2$, $x_3= x_3^{'} - x_3^{''} = 2 - 0 = 2$

$S_1=5$, $S_2=8$, $S_3=0$, $S_4=0$

4- النتائج

من خلال استخدام طريقة تطوير مولد قطع المستوي لحل مسائل البرمجة الخطية العددية تمكنا من الحصول على النتائج التالية:

(1) تم الحصول على الحل العددي الأمثل لمسائل البرمجة الخطية غير المقيدة دون الاستعانة بالحل المستخرج بطرق حل مسائل البرمجة الخطية(طريقة السمبلكس) وهذا يقلل من عدد جداول الحل للمسألة.

(2) من الملاحظ إن قيمة عنصر المحور في سطر القطع المولد تكون دائما(1) أو(1−) وهذا يحافظ على بقاء القيم في جميع جداول الحل أعداد صحيحة مما يضيف سهولة وسرعة في إجراء الحسابات.

(3)عملية إيجاد القطع المولد باستخدام خوارزمية(MSCPA) تكون بسيطة مما يسهل علينا الانتقال إلى جدول جديد وبالتالي الوصول إلى الحل العددي الأمثل للمسألة بعدد اقل أو يساوي عدد الجداول باستخدام الطرق الأخرى.

(4) اذا كان هنالك (قيد واحد أو أكثر) في المسألة من مضاعفات دالـة الهدف فالأفضل أن نختار المتغير الداخل المرافق لأقل موجب في حالة التصغير واقل سالب في حالة التكبير وذلك للحصول على الحل العددي الأمثل للمسألة بأقل عدد من الجداول.

(5) يمكن أن نحصل على الحل العددي الأمثل لبعض المسائل باستخدام طريقة السمبلكس مباشرةً لكن استخدام طريقة MSCPA يعطينا نفس الحل بعدد جداول اقل وسهولة في الحساب لكون جميع قيم الجداول هي أعداد صحيحة.

5 – مناقشة النتائج

استناداً إلى النتائج التي توصلنا إليها من خلال تطبيق طريقة خوارزمية مولد قطع المستوي (MSCPA) لإيجاد الحل العددي لمسائل البرمجة الخطية غير المقيدة يمكن أن نستنتج إن طريقة(MSCPA) تعتبر من أفضل الطرق المستخدمة لهذا الغرض بما فيها من ميزات تتضمن السهولة والسرعة في الوصول للحل العددي الأمثل للمسألة. أما إذا تعذر الوصول إلى الحل الأمثل للمسألة وهذه مشكلة ممكن أن نواجهها في بعض مسائل البرمجة الخطية غير المقيدة فأن هذه الطريقة تعطينا أفضل حل عددي ممكن الوصول إليه.

المصادر

[1] **إسراء هادي حسن** . تطوير وبرمجة طريقة مولد قطع المستوي لحل مسائل البرمجة العددية الصحيحة.**رسالة ماجستير مقدمة إلى قسم العلوم التطبيقية في الجامعة التكنولوجية 2004.**

[2] **رشيد بشير رحيمة** .دراسة وتطوير حل مسائل البرمجة الخطية غير المقيدة . **رسالة ماجستير مقدمة إلى قسم العلوم التطبيقية في الجامعة التكنولوجية 2005**

[3] **عباس احمد حسن**.تطوير وبرمجة حل مسائل البرمجة الخطية غير المقيدة،**مجلة كلية التربية في ألجامعه المستنصرية العدد 1996/3.**

[4] Gomory R.E., Gomory's cutting plane method for integer programming.
http://www.som.umd.umich.edu/romagnoil/Gomory.html, 2004

[5] **S.I GASS,On the solution of linear programming problems with free variables, computer and operations research vol-12 no.3, 1985.**

[6] Hamdy A.Taha, Operations Research, An Introduction fifth edition, 2000.

[7] Michual E. and Harry m., An Advance Start Algorithm for all integer programming, Computer And O.R vol-12 No.3, 1985 .

[8] http://www.ozgid.com/services/linear-standrd-form.
htm#unrestrictedvariables#unrestricted variables.

[9]**http://en.wikpedia.org/wiki/linear-programming# Example last modified 4 Des.2007.**

[10]**http://www. ozgrid.com/services/linear-programs-solver.htm**

Using Modify Surrogate Cutting Plane (MSCPA) Method To Finding The Integer Solution For linear Programming Problems with Unrestricted Variables

Asra'a Hadi Hassan*

Abstract

There are many methods for solving linear programming problems with unrestricted variables that gets the optimal solution of the problem where the values of variables are fractional numbers not integer numbers, But when there are conditions in the problem that requires the result is optimal integer solution, that is the resulted variables values was numerical integer, At that time we must turn to a method that we get from it the integer solution of the problem. That is the subject of the research where we will employ an algorithm of the method (Modify Surrogate Cutting Plane algorithm) to solve linear integer programming problems that to find integer solution of linear programming problems with unrestricted variables that after getting a view at linear Programming with unrestricted variables and Integer Programming.

* Dep. Of Applied Sciences/ University Of Technology