مقارنة بين أسلوب بيز وطرائق أخرى لتقديـــــــــر دالة المعولية للتوزيـــــــــــع الأسي العام

د. نشأت جاسم محمد *

المستخلص:

يهتم هذا البحث بمسالة تقدير دالة المعولية للتوزيع الاسي العام بمعلمتين. يتم في هذا البحث تقديم طرائق لتقدير معلمات التوزيع الاسي العام بمعلمتين ومن ثم دالة المعولية لذلك التوزيع، كما تم إجراء دراسة تجريبية لغرض المقارنة وإثبات كفاءة تلك الطرائق المقترحة عملياً وذلك من خلال الاعتماد على مشاهدات مولدة من التوزيع الاسي العام بمعلمتين ولأحجام عينات وقيم معلمات مختلفة وتمت المقارنة بالاعتماد على متوسط مربعات الخطأ. وقد تبين أن طريقة بيز والإمكان الأعظم هما أكفاء الطرائق ولجميع أحجام العينات وقيم المعلمات المستخدمة في البحث .

* الكلية التقنية الإدارية-بغداد/ قسم تقنيات المعلوماتية

المقدمة و هدف البحث:

في ظل التطور السريع الذي تشهدهُ دراسات المعولية ظهرت مؤخراً العديد من التوزيعات التي تصف بدقة أوقات الفشل،تم تقديم هذا التوزيع لأول مرة عام 1999 من قبل الباحثان الهنديان Gupta وkundu [1]،ويعتبر هذا التوزيع حالة خاصة من توزيـــــــع Compertz-Verhulst المستخدم بكثرة في دراسات النمو السكاني وذلك عندما تكون معلمة الشكل تساوي الواحد الصحيح[2] ،ويعتبر أيضا حالة خاصة من توزيع ويبل الاسي Exponentiated Weibull Distribution وذلك عندما تكون معلمة الشكل تساوي الواحد[3].يمتلك هذا التوزيع دالة خطورة متغيرة مع الزمن وهذه الصفة جعلت منه أنموذج جيد وكفوء في وصف العديد من بيانات الفشل كما يُستخدم أيضاً بديل جيد عن توزيع كاما وتوزيع ويبل ذي المعلمتين [2].

إن دالة الكثافة الاحتمالية لهذا التوزيع هي:

$$f(t;\alpha,\lambda)=\alpha\lambda(1-e^{-\lambda t})^{\alpha-1}e^{-\lambda t} \qquad , \; a,l,t>0 \qquad ......(1)$$

إذ إن:

a: **تمثل معلمة الشكل shape parameter.**

λ: **تمثل معلمة القياس scale parameter.**

ونلاحظ عندما تكون معلمة الشكل a تساوي الواحد $(a=1)$ فان التوزيع الاسي العام يتحول إلى التوزيع الاسي الاعتيادي بمعلمة شكل λ ،علما أن الأخير يمكن الحصول عليه كحالة خاصة من توزيع كاما وتوزيع ويبل وعلية فان التوزيعات الثلاثة السابقة تعتبر تعميمات من التوزيع الاسي ولكن بصور مختلفة .

إن دالة التوزيع التجميعية لهذا التوزيع هي:

$$F(t;a,l)=(1-e^{-lt})^{a} \qquad a,l,t>0 \qquad ......(2)$$

وبذلك فان دالة المعولية ستكون:

$$R(t)=1-F(t)=1-(1-e^{-lt})^{a} \qquad ......(3)$$

ودالة الخطورة hazard function ستكون:

$$h(t;a,l)=\frac{a\,l\,(1-e^{-lt})^{a-1}e^{-lt}}{1-(1-e^{-lt})^{a}} \qquad ......(4)$$

وبالاعتماد على معلمة الشكل (a) فان التوزيع الاسي المعمم سوف يمتلك دالة خطورة متزايدة عندما تكون (a) اكبر من الواحد ومتناقصة عندما تكون (a) اقل من الواحد

وثابتة عندما تكون (a) تساوي الواحد الصحيح وهذه الصفة جعلت منه أنموذج جيد لوصف البيانات وبشكل أفضل من توزيع كاما وتوزيع ويبل [2]. ولتقدير دالة المعولية بالاعتماد على البيانات الكاملة كانت هنالك العديد من الطرائق منها طريقة الإمكان الأعظم وطريقة العزوم [2] والتي تمتاز بصفات إحصائية مختلفة وتتمثل المشكلة في صعوبة إجراء المقارنة النظرية بين تلك الطرائق نظراً لعدم إمكانية الحصول على التوزيع النظري للمقدرات الخاصة بتلك الطرائق والتي جعلت من الصعب التعرف على أي طريقة أفضل بالاعتماد على المعايير الإحصائية المعروفة[4].

يهدف هذا البحث إلى استعراض الطرائق المستخدمة في تقدير دالة المعولية الخاصة بهذا التوزيع ومن ثم اقتراح طريقتين تقليديتين وإجراء المقارنة التجريبية بين تلك الطرائق التقليدية وطريقة بيز المعتمدة على المعلومات الأولية وتتم المقارنة لجميع نقاط البيانات المستخدمة في تقدير دالة المعولية لهذا التوزيع ووفقاً للمعيار الإحصائي متوسط مربعات الخطأ(MSE).

الجانب النظري:

طرائق التقدير المستخدمة في البحث هي:

1- طريقة الإمكان الأعظم:Maximum Likelihood Method(m.l.e)

تعتبر هذه الطريقة إحدى أهم طرائق التقدير والتي تهدف إلى جعل دالة الإمكان في نهايتها العظمى،فإذا كانت لدينا عينة عشوائية $(t_1,\dots,t_n)$، تتوزع وفقا للتوزيع الاسي المعمم بمعلمة شكل a ومعلمة قياس l ، فان مقدر الإمكان الأعظم هو الذي يجعل دالة الإمكان في نهايتها العظمى ويمكن الحصول عليه باشتقاق لوغاريتم دالة الإمكان ومساواتها بالصفر،فإذا كانت(t) تتوزع توزيع أسي معمم بمعلمتين(a, l) فان دالة الإمكان ستكون كالآتي:

$$L(t_1,t_2,\dots,t_n;a,l)=\prod_{i=1}^{n} f(t_i;a,l)=a^n l^n \prod_{i=1}^{n}(1-e^{-lt_i})^{a-1} e^{-l\sum_{i=1}^{n} t_i} \qquad \dots(5)$$

$$;(t_i,a,l>0),i=1,2,\dots,n$$

وبأخذ اللوغاريتم الطبيعي للطرفين فان المعادلة السابقة تصبح كالأتي:

$$ln(L)=n\,log(a)+n\,log(l)+(a-1)\sum_{i=1}^{n} log(1-e^{-lt_i})-l\sum_{i=1}^{n} t_i \qquad ..(6)$$

وبالاشتقاق الجزئي للمعادلة (6) بالنسبة لكل من المعلمتين a ، l على التوالي ومساواتهما بالصفر نحصل على المعادلتين الطبيعيتين التاليتين :[1]

$$Q_1=\frac{\partial ln(L)}{\partial a}=\frac{n}{a^{\wedge}}+\sum_{i=1}^{n}log(1-e^{-l^{\wedge}t_i})=0 \qquad ....(7)$$

$$Q_2=\frac{\partial ln(L)}{\partial l}=\frac{n}{l^{\wedge}}+(a^{\wedge}-1)\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{t_i e^{-l^{\wedge}t_i}}{1-e^{-l^{\wedge}t_i}}\right)-\sum_{i=1}^{n}t_i=0 \qquad ......(8)$$

وبحل المعادلتين (7) و (8) بالنسبة إلى $a^{\wedge}$ و $l^{\wedge}$ عددياً باستخدام طريقة نيوتن رافسن التكرارية متعددة المتغيرات المستخدمة لحل منظومة المعادلات اللاخطية، فيتم الحصول على مقدر الإمكان الأعظم لكل معلمة من خلال منظومة المعادلات التكرارية التالية:

$$\begin{pmatrix} a(k+1)^{\wedge} \\ l(k+1)^{\wedge} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a(k)^{\wedge} \\ l(k)^{\wedge} \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} J(k) \end{pmatrix}^{-1}*\begin{pmatrix} f(k) \end{pmatrix} \qquad k=0,1,2,...,L \quad ......(9)$$

إذ أن:

$$J(k)=\begin{pmatrix} \frac{\partial Q1}{\partial a} & \frac{\partial Q1}{\partial l} \\ \frac{\partial Q2}{\partial a} & \frac{\partial Q2}{\partial l} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{-n}{a(k)^{\wedge}} & \sum_{i=1}^{n}\frac{t_i e^{-l^{\wedge}(k)^{\wedge}t_i}}{(1-e^{-l^{\wedge}(k)^{\wedge}t_i})} \\ \sum_{i=1}^{n}\frac{t_i e^{-l^{\wedge}(k)^{\wedge}t_i}}{(1-e^{-l^{\wedge}(k)^{\wedge}t_i})} & \frac{-n}{l(k)^{\wedge 2}}+(a(k)^{\wedge}-1)\sum_{i=1}^{n}\frac{(-t_i^{2}e^{-l(k)^{\wedge}t_i})}{(1-e^{-l(k)^{\wedge}t_i})} \end{pmatrix} \quad (10)$$

$$f_{(k)}=\begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{n}{a^{\wedge}_{(k)}}+\sum_{i=1}^{n}log(1-e^{-l^{\wedge}_{(k)}t_i}) \\ \frac{n}{l^{\wedge}_{(k)}}+(a^{\wedge}_{(k)}-1)\sum_{i=1}^{n}\frac{t_i e^{-l^{\wedge}_{(k)}t_i}}{(1-e^{-l^{\wedge}_{(k)}t_i})}-\sum_{i=1}^{n}t_i \end{pmatrix} \qquad ....(11)$$

و بالاعتماد على قيم ابتدائية للمعلمات حيث يستخدم الوسط الحسابي للبيانات كقيم ابتدائية، وبتكرار العلاقة(9) إلى L من المرات حيث تستقر النتائج ويتم الحصول على المقدرات، فإذا كانت $\alpha^{\wedge}_{m.l.e}$ و $\lambda^{\wedge}_{m.l.e}$ هي مقدرات طريقة الإمكان لكل من a و l على التوالي فان مقدر دالة المعولية و بالاستناد على خاصية الثبات التي تمتاز بها هذه الطريقة سوف يأخذ الصيغة التالية :

$$R^{\wedge}_{m.l.e}(t)=1-(1-e^{-\lambda^{\wedge}_{m.l.e}t})^{\alpha^{\wedge}_{m.l.e}} \qquad ....(12)$$

2- طريقة العزوم:Method of Moments (m.o.m)

تتميز طريقة العزوم بسهولتها فهي تعتمد على فرضية مساواة عزوم المجتمع m_n مع عزوم العينة m_n وحل المعادلات لإيجاد تقديرات للمعلمات، إذ إن العزم الأول والثاني للتوزيع الاسي العام يمكن الحصول عليه من خلال دالة توليد العزوم الخاصة به وكما يلي:

$$M_x^{(t)} = E(e^{xt}) = \int_0^{\infty} a\,l\,(1-e^{-lx})^{a-1} e^{-lx} e^{xt}\,dx \qquad \text{......(13)}$$

$$= a\,l \int_0^{\infty} (1-e^{-lx})^{a-1} e^{(t-l)x}\,dx \qquad \text{......(14)}$$

ليكن $y = e^{-lx}$, $\begin{matrix} 0 < x < \infty \\ 0 < y < 1 \end{matrix}$

فان $x = \dfrac{-1}{l}\log(y)$

و $dx = \dfrac{-1}{l}\dfrac{dy}{y}$

$$= a\,l \int_0^1 (1-y)^{a-1} y^{\frac{-t}{l}+1} \frac{1}{l}\frac{dy}{y} = a\,b(a, 1-t/l) = \frac{a\,\Gamma(a)\,\Gamma(1-t/l)}{\Gamma(a+1-t/l)} \qquad \text{......(15)}$$

وباشتقاق لوغاريتم الدالة المولدة للعزوم،معادلة رقم(15) بالنسبة إلى t ومساواتها بالصفر

فسيتم الحصول على الوسط الحسابي والتباين وكما يلي:

$$\because E(t) = \frac{\partial \log M_x^{(t)}}{\partial t}\Big\downarrow_{t=0}$$

$$= \log(a\,\Gamma(a))_{\downarrow t=0} + \log(\Gamma(1-t/l))_{\downarrow t=0} - \log(\Gamma(a+1-t/l))_{\downarrow t=0} = \frac{1}{l}\left(j(a+1) - j(1)\right) \text{(16)}$$

$$V(t) = \frac{\partial^2 \log M_x^{(t)}}{\partial t^2}\Big\downarrow_{t=0}$$

$$= \frac{1}{l^2} j'(1-t/l)_{\downarrow t=0} - \frac{1}{l^2} j'(a+1-t/l)_{\downarrow t=0} = \frac{-1}{l^2}\left[j'(a+1) - j'(1)\right] \text{.(17)}$$

إذ أن:

$j(\cdot)$ **:تمثل digamma function وتساوي** $j(t)=\frac{d\log\Gamma(t)}{dt}$.

$j'(\cdot)$ **:تمثل المشتقة الأولى لدالة digamma function.[2]**

ومن خلال مساواة عزم العينة الأول والثاني مع عزم المجتمع الأول والثاني على التوالي، نحصل على:

$$\bar{t}=\frac{1}{l}(j(a+1)-j(1)) \quad \text{.......(18)}$$

$$s^2=\frac{-1}{l^2}\left[j'(a+1)-j'(1)\right] \quad \text{......(19)}$$

وبحل المعادلتين (18)و(19) بالنسبة إلى a **و** l **عددياً باستخدام طريقة نيوتن رافسن التكرارية متعددة المتغيرات المستخدمة لحل منظومة المعادلات اللاخطية فيتم الحصول على مقدر العزوم ،فإذا كانت** $\hat{\alpha}_{m.o.m}$ **و** $\hat{\lambda}_{m.o.m}$ **هي مقدرات طريقة العزوم لكل من** a **و** l **على التوالي فان مقدر دالة المعولية سوف يأخذ الصيغة التالية :**

$$\hat{R}_{m.o.m}(t)=1-(1-e^{-\hat{\lambda}_{m.o.m}t})^{\hat{\alpha}_{m.o.m}} \quad \text{......(20)}$$

3- طريقة المربعات الصغرى اللاخطية(طريقة مقترحة) : Nonlinear Least Squares Method (n. l.s)

أن طريقة المربعات تتضمن تصغير مجموع مربعات الخطأ التالي :

$$s(a,b)=\sum_{i=1}^{n}(y_i-a-bx_i)^2 \quad \text{......(21)}$$

وبالاشتقاق الجزئي للدالة السابقة لكل من (a,b) ومساواة ناتج كل اشتقاق بالصفر يتم الحصول على المعادلتين الطبيعيتين، وبإجراء تبسيط رياضي يتم الوصول إلى مقدرات طريقة المربعات الصغرى للمعلمتين، ومن مميزات هذه الطريقة إنها غير متحيزة. وبالاعتماد على دالة التوزيع التجميعية سيكون لدينا :

$$F(t;a,l)=\left(1-e^{-lt}\right)^a \quad \text{..........(22)}$$

$$F(t;a,l)^{1/a}=\left(1-e^{-lt}\right) \quad \text{..........(23)}$$

$$\Longrightarrow \quad t_i=\frac{-1}{l}log(1-F_i^{1/a}) \quad \text{............(24)}$$

ومن الصيغة (24) نلاحظ بان الأنموذج هو لاخطي بدلالة معلمات التوزيع ،وبذلك سيتم الاستعانة بطرائق التقدير الخاصة بالنماذج اللاخطية فإذا كان:

$$y_i = \frac{-1}{b}\log(1 - x_i^{1/a}) + e_i \quad ; \quad i = 1,2,...,n \qquad ....(25)$$

إذ أن :

e_i : يمثل متغير الخطأ العشوائي

$y_i = t_i$

$a = a$

$b = l$

$x_i = F_i$ ،إذ أن دالة التوزيع التجميعية سوف يتم حسابها بطريقة لامعلمية وحسبالصيغة التالية :

$$F^{\wedge}(t_{(i)}) = \left[\frac{i}{n+1}\right] \qquad .....(26)$$

إذ أن :

i : تمثل رتبة المشاهدات بعد ترتيبها تصاعدياً .

وباستخدام طريقة المربعات الصغرى اللاخطية [5] ،وبالاستعانة بالخوارزميات الجاهزة الموجودة ضمن حزمة برمجيـــــــات Matlab-2010a والتي يتم من خلالها إعطاء الشكل الرياضي للأنموذج السابق مع البيانات ويتم الحصول على المقدرات الخاصة بكل معلمة ،فإذا كانت $\alpha^{\wedge}_{n.l.s}$ و $\lambda^{\wedge}_{n.l.s}$ هي مقدرات طريقة المربعات الصغرى اللاخطية لكل من a و l على التوالي فان مقدر دالة المعولية سوف يأخذ الصيغة التالية :

$$R^{\wedge}_{n.l.s}(t) = 1 - (1 - e^{-\lambda^{\wedge}_{n.l.s} t})^{\alpha^{\wedge}_{n.l.s}} \qquad .....(27)$$

4- طريقة الوسيط-التباين(طريقة مقترحة) Median-Variance: Method(M.e.d.v)

قام الباحث(Afify) في عام 2002 باستخدام طريقة الوسيط لتقدير معلمات التوزيع الآسي بمعلمتين[6] ،يتم في هذا البحث استخدام نفس تلك الطريقة لتقدير معلمات التوزيع الاسي المعمم بمعلمتين.ومن المعروف إن الوسيط هو القيمة التي تفصل البيانات إلى جزئيين متساويين، لذلك فان

$$F(t_{med}) = \frac{1}{2} \qquad ....(28)$$

$$(1 - exp(-l\, t_{med}))^a = \frac{1}{2} \qquad ....(29)$$

وبتبسيط المعادلة فان: ، $(1 - exp(-l\, t_{med})) = (0.5)^{1/a}$ ....(30)

$$t_{med} = (\frac{-1}{l}) log(1 - 0.5^{1/a}) \qquad ....(31)$$

أي إن

$$t_{med}-(\frac{-1}{l})log(1-0.5^{1/a})=0 \quad ....(32)$$

وبحل المعادلتين (19)و(32) بالنسبة إلى a و l عددياً باستخدام طريقة نيوتن رافسن التكرارية متعددة المتغيرات المستخدمة لحل منظومة المعادلات اللاخطية فيتم الحصول على مقدر طريقة الوسيط ،فإذا كانت $\lambda^{\wedge}_{m.e.d}$ و $\alpha^{\wedge}_{m.e.d}$ هي مقدرات طريقة الوسيط لكل من a و l على التوالي فان مقدر دالة المعولية سوف يأخذ الصيغة التالية :

$$R^{\wedge}_{m.e.d}(t)=1-(1-e^{-\lambda^{\wedge}_{m.e.d}t})^{\alpha^{\wedge}_{m.e.d}} \quad ....(33)$$

5-طريقة بيز:Bayes Method(bay)

في هذه الطريقة سيتم استخدام أسلوب بيز لتقدير دالة المعولية بافتراض أن المعلومات الأولية المتوفرة حول معلمات التوزيع تتبع توزيع كاما بسبب كون مجال قيم المعلمات غير سالب non-negative ،وفي معظم الحالات التطبيقية فان المعلومات الأولية حول المعلمات الخاصة بتوزيع المعاينة تكون مستقلة وبذلك فان[bayes]:

$$\begin{Bmatrix} p_1(a)\propto a^{b-1}e^{-aa} \\ p_2(l)\propto l^{d-1}e^{-cl} \end{Bmatrix} \quad a,l>0 \quad ....(34)$$

فإذا كانت $(t_1,t_2,...,t_n)$ تمثل عينة عشوائية من توزيع $GE(a,l)$ فان دالة الكثافة المشتركة اللاحقة ستكون :

$$f(a,l\backslash t_1,...,t_n)=\frac{L(t_1,..t_n\backslash a,l).p_1(a).p_2(l)}{\int_0^\infty\int_0^\infty L(t_1,...,t_n\backslash a,l).p_1(a).p_2(l)da\,dl} \quad ...(35)$$

وباستخدام دالة الخسارة التربيعية التي تعد من أكثر الأنواع شيوعا واستخداماً ،فان مقدر بيز للمعلمة l,a سوف يمثل التوقع للتوزيع الأحادي اللاحق (posterior mean) لتلك المعلمة على التوالي،وبذلك فان

$$a^{\wedge}_{bay}=\frac{\int_0^\infty\int_0^\infty a\,L(t_1,..t_n\backslash a,l).p_1(a).p_2(l)dl\,da}{\int_0^\infty\int_0^\infty L(t_1,...,t_n\backslash a,l).p_1(a).p_2(l)da\,dl} \quad ....(36)$$

$$l^{\wedge}_{bay}=\frac{\int_0^\infty\int_0^\infty l\,L(t_1,..t_n\backslash a,l).p_1(a).p_2(l)da\,dl}{\int_0^\infty\int_0^\infty L(t_1,...,t_n\backslash a,l).p_1(a).p_2(l)da\,dl} \quad ....(37)$$

وبسبب صعوبة إجراء تلك التكاملات تحليلاً،فسوف يتم اللجوء إلى صيغة تقريب Lindley (Lindsey's Approximation) [7]،المستخدمة لتقريب النسبة الناتجة من تكاملين والتي تساوي في حالة استخدام معلمتين:

$$g^{\wedge} = g(l_1^{\wedge}, l_2^{\wedge}) + 0.5[A + l_{30}B_{12} + l_{03}B_{21} + l_{21}C_{12} + l_{12}C_{21}] + p_1A_{12} + p_2A_{21} \quad ..(38)$$

اذ أن:

$$g(l1, l2) = g(a, l) \quad ....(39)$$

$$A = \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} W_{ij}T_{ij} \quad ....(40)$$

$$l_{ij} = \frac{\partial^{i+j} L(l_1, l_2)}{\partial l_1^i \partial l_2^j} \quad ; \quad i, j = 0,1,2,3, i + j = 3 \quad ....(41)$$

$$p_i = \frac{\partial p}{\partial l_i}, \quad W_i = \frac{\partial g(l_1, l_2)}{\partial l_i} \quad i = 1,2 \qquad p = \log p(l_1, l_2) \quad ...(42)$$

$$B_{ij} = (W_iT_{ii} + W_jT_{ij})T_{ii} \quad C_{ij} = 3W_iT_{ii}T_{ij} + W_j(T_{ii}T_{jj} + 2T_{ij}^2) \quad ....(43)$$

$$A_{ij} = W_iT_{ii} + W_jT_{ji} \quad \boxed{W_{ij} = \frac{\partial^2 g(l_1, l_2)}{\partial l_i \partial l_j}}$$

$L(.,.)$ تمثل لوغاريتم دالة الإمكان للبيانات :

$$L(a, l) = n\log(a) + n\log(l) + (a-1)\sum_{i=1}^{n}\log(1 - \exp(-l t_i)) - l\sum_{i=1}^{n} t_i \quad ..(44)$$

$p(l_1, l_2)$:تمثل دالة الاحتمال الأولي المشترك للمعلمتين (l_1, l_2) .

T_{ij}:تمثل العنصر i, j في مصفوفة معكوس معلومات فيشر.

ويتم إيجاد الكميات السابقة من خلال التعويض بمقدرات الإمكان الأعظم $(l_1^{\wedge}, l_2^{\wedge})$ للمعلمات (l_1, l_2) على التوالي.

وبذلك فان:

$$l_{12} = -\sum_{i=1}^{n} \frac{t_i^{\,2} e^{-l^{\wedge} t_i}}{(1-e^{-l^{\wedge} t_i})^2} \qquad l_{21} = 0 \qquad \text{.............(45)}$$

$$l_{30} = \frac{2n}{a^{\wedge 3}} \qquad l_{03} = \frac{2n}{l^{\wedge 3}} + (a^{\wedge} - 1)\sum_{i=1}^{n} \frac{t_i^{\,3} e^{-l^{\wedge} t_i}(1+e^{-l^{\wedge} t_i})}{(1-e^{-l^{\wedge} t_i})}$$

$$T_{11} = \frac{W}{UW - V^2} \qquad T_{12} = -\frac{V}{UW - V^2} = T_{21} \qquad T_{22} = \frac{U}{UW - V^2} \quad \text{..(46)}$$

إذ أن:

$$V = -\sum_{i=1}^{n} \frac{t_i e^{-\lambda^{\wedge} t_i}}{(1-e^{-\lambda^{\wedge} t_i})} \qquad U = \frac{n}{a^{\wedge 2}} \qquad \text{..(47)}$$

$$W = \frac{2n}{\lambda^{\wedge 2}} + (\alpha^{\wedge} - 1)\sum_{i=1}^{n} \frac{t_i^{\,2} e^{-\lambda^{\wedge} t_i}}{(1-e^{-\lambda^{\wedge} t_i})^2}$$

ولتقدير a فان a $g(a, l) = g(l1, l2) = a$، وبذلك فان:

$W_1 = 1$ و $W_2 = 0$ و $i, j = 1,2$ **,** $W_{ij} = 0$ ، $A = 0$ ، $B_{12} = T_{11}^2$

، $B_{12} = T_{21}T_{22}$ ، $C_{12} = 3T_{11}T_{12}$

$C_{21} = (T_{22}T_{11} + 2T_{21}^2)$ ، $A_{12} = T_{11}$ ، $A_{21} = T_{12}$ ، $p_1 = \frac{b-1}{a} - a$ ،

$p_2 = \frac{d-1}{l} - c$، أي أن:

$$\alpha^{\wedge}_{bias} = \alpha^{\wedge} - 0.5\left[\frac{2n}{\alpha^{\wedge 3}} T_{11}^2 - \left(\frac{2n}{\lambda^{\wedge 3}} + (\alpha^{\wedge} - 1)\sum_{i=1}^{n} \frac{t_i^{\,3} e^{-\lambda^{\wedge} t_i}(1+e^{-\lambda^{\wedge} t_i})}{(1-e^{-\lambda^{\wedge} t_i})}\right) T_{21}T_{22} - \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{t_i^{\,2} e^{-\lambda^{\wedge} t_i}}{(1-e^{-\lambda^{\wedge} t_i})^2}\right)(T_{22}T_{11} - 2T_{21}^2)\right] - \left(\frac{b-1}{\alpha^{\wedge}} - a\right)T_{11} - \left(\frac{d-1}{\lambda^{\wedge}} - c\right)T_{12}$$

.....(48)

ولتقدير l فان l $g(a, l) = g(l1, l2) = l$، وبذلك فان $W_1 = 0$ و $W_2 = 1$ و

$i, j = 1,2$ **,** $W_{ij} = 0$ ، $A = 0$ ، $B_{12} = T_{12}T_{11}$ ، $B_{21} = T_{22}^2$ ،

$A_{21} = T_{22}$ ، $A_{12} = T_{21}$ ، $C_{21} = 3T_{22}T_{21})$ $C_{12} = T_{11}T_{22} + 2T_{12}^2$ ،

أي أن: ، $p_2 = \dfrac{d-1}{l} - c$ ، $p_1 = \dfrac{b-1}{a} - a$

$$\lambda_{bay} = \hat{\lambda} + 0.5\left[\frac{2n}{\alpha^2}T_{12}T_{11} - \left(\frac{2n}{\lambda^3} - (\alpha - 1)\sum_{i=1}^{n}\frac{t_i^2 e^{-\lambda t_i}(1+e^{-\lambda t_i})}{(1-e^{-\lambda t_i})^3}\right)T_{22}^2 - \left(\sum_{i=1}^{n}\frac{t_i^2 e^{-\lambda t_i}}{(1-e^{-\lambda t_i})^2}\right)(T_{22}T_{21})\right] + \left(\frac{b-1}{\alpha} - a\right)T_{21} + \left(\frac{d-1}{\lambda} - c\right)T_{22}$$

..(49)

فإذا كانت $\hat{\alpha}_{bay}$ و $\hat{\lambda}_{bay}$ هي مقدرات طريقة بيز لكل من a و l على التوالي فان مقدر دالة المعولية سوف يأخذ الصيغة التالية :

$$R_{\hat{bay}}(t) = 1 - (1 - e^{-\hat{\lambda}_{bay} t})^{\hat{\alpha}_{bay}} \qquad \text{.........(50)}$$

الجانب التجريبي:

تم إجراء البحث باستخدام المحاكاة لغرض المقارنة بين الطرائق المختلفة تجريبياً،حيث يتميز هذا الأسلوب بالمرونة ويوفر الكثير من الوقت والجهد والمال وفيه يتم توليد البيانات نظرياً من دون الحصول عليها عملياً وأيضا دون الإخلال بدقة النتائج المطلوبة وتتلخص هذه الطريقة بالخطوات التالية:

1- تحديد القيم الافتراضية: لقد تم اختيار أربعة أحجام للعينات هي (20،30،50،10). وقيم مختلفة أيضاً لمعلمات التوزيع الحقيقية والتي تمثل حالة كون دالة الخطورة متناقصة، ثابتة ومتزايدة وهي موضحة في الجدول التالي:

جدول رقم (1) يوضح القيم المختلفة للمعلمات المستخدمة في البحث

الحالات	I	II	III
a	0.50	1	1.5
λ	1	1	1

2- توليد البيانات: وفيها يتم توليد البيانات التي تخضع للتوزيع الاسي العام ووفقاً لكل قيمة من قيم المعلمات الافتراضية وحجم العينة المحدد في الخطوة (1) ويتم من خلال:

أ- توليد أرقام عشوائية U_i تتبع التوزيع المنتظم ضمن الفترة $(0,1)$.

$$U_i \sim U(0,1) \quad , \quad i = 1,\ldots,n \qquad ....(51)$$

U_i: يمثل متغير عشوائي مستمر يتم توليده باستخدام الحاسبة الالكترونية وفقاً للصيغة

$U = Rand$.

ب- تحويل البيانات المولدة في الخطوة (أ)والتي تتبع التوزيع المنتظم إلى بيانات تتبع التوزيع الاسي العام،وباستخدام دالة التوزيع التجميعية وحسب طريقة التحويل المعكوس ينتج:

$$F(t;\alpha,\lambda) = (1-e^{-\lambda t})^{\alpha} \qquad ......(52)$$

ومن ثم فان:

$$U = (1-e^{-\lambda t})^{\alpha} \qquad ....(53)$$

وبإجراء بعض العمليات الجبرية البسيطة ينتج:

$$t = (-1/\lambda)\log(1-U^{1/\alpha}) \qquad ....(54)$$

ج- في هذه المرحلة يتم تقدير معلمات التوزيع الاسي العام ولكافة الطرائق المبينة سابقاً واستخدامها في تقدير دالة المعولية بالاعتماد على (t_i) المولدة في الخطوة(ب) لغرض الوصول للمقدر الأفضل فقد تم الاعتماد على المقياس الإحصائي متوسط مربعات الخطاء(MSE) كأساس للمقارنة والذي يأخذ الصيغة التالية:

$$MSE(R^{\wedge}(t)) = \frac{\sum_{i=1}^{L}(R^{\wedge}(t_i) - R(t_i))^2}{L} \qquad ....(55)$$

ولحجم مكرر(L=1000) وبالاعتماد على البرنامج الذي تم كتابته باستخدام تطبيق MATLAB-R2010a الحديث، فان الجداول من رقم (2) إلى (7) تبين نتائج هذه البحث.

الاستنتاجات:

من الجداول رقم (2) إلى(7) تبين الأتي:

1- أظهرت نتائج المحاكاة بان الطريقة بيز bayes أفضل وأكفاء طريقة لأن قيمها المقدرة كانت اقرب إلى القيم الحقيقية وحققت اقل MSE لجميع الحالات وأحجام العينات المستخدمة في البحث وتتجلى أفضلية هذه الطريقة بشكل واضح عند زيادة قيم (t) .

2- أظهرت نتائج المحاكاة بان طريقة الإمكان الأعظم mle كانت ثاني أفضل وأكفاء طريقة لأن قيمها المقدرة كانت في المرتبة الثانية اقرب إلى القيم الحقيقية وحققت ثاني اقل MSE لجميع الحالات وأحجام العينات المستخدمة في البحث ، وتتجلى أفضلية هذه الطريقة بشكل واضح عند القيم المتوسطة لقيم (t) .

3- أظهرت نتائج المحاكاة إن طريقة الوسيط-التباين medv وطريقة العزوم كانتا في المركز الثالث من حيث الأفضلية خصوصا في القيم الصغيرة إلى (t) ،في حين كانت طريقة المربعات الصغرى اللاخطية أسوء طريقة لجميع الحالات وأحجام العينات المستخدمة في البحث.

4- كانت قيم MSE تتناقص مع ازدياد حجم العينة ولجميع الحالات وهذا يتطابق مع النظرية الإحصائية،وكانت قيم دالة المعولية الحقيقية رتيبة ومتناقصة بازدياد قيم الزمن (t) مما يؤكد صحة الجانب النظري من هذا البحث حول سلوك هذه الدالة.

التوصيات:

1- يمكن اعتماد طريقة بيز (bayes) في البحوث التي تتطلب تقدير دالة المعولية للتوزيع الاسي العام خصوصاً حالة الأنظمة التي تتصف بزمن حياة طويل (القيم الكبيرة إلى (t)) وطريقة الإمكان الأعظم في حالة الأنظمة التي تتصف بزمن حياة قصير (القيم الصغيرة إلى (t)) .

يوصي الباحث بتطوير البحث ليشمل حالة البيانات المفقودة والبيانات تحت المراقبة و تحت المراقبة التتابعية وبشكل مفصل .

جدول رقم (2) يبين قيم دالة المعولية الحقيقية والمقدرة لجميع الطرائق وأحجام العينات المستخدمة في تجربة المحاكاة للحالة الأولى

n	t	real	mle	mom	nls	medv	bay	Best
10	1	0.20494	0.18528	0.18435	0.22429	0.187087	0.130995	Medv
	2	0.070127	0.064243	0.059387	0.099004	0.060115	0.029871	Mle
	3	0.025211	0.026396	0.023395	0.052324	0.023676	0.008526	Mle
	4	0.0092	0.012012	0.01044	0.030977	0.01058	0.002801	Mom
	5	0.003375	0.005874	0.005081	0.019887	0.005154	0.001017	Mom
	6	0.00124	0.003033	0.002637	0.013577	0.002674	0.000398	Medv
	7	0.000456	0.001634	0.001437	0.009726	0.001455	0.000165	Bay
	8	0.000168	0.000912	0.000814	0.007243	0.000823	7.23E-05	Bay
	9	6.17E-05	0.000524	0.000476	0.005565	0.000479	3.29E-05	Bay
	10	2.27E-05	0.000308	0.000285	0.004388	0.000287	1.55E-05	Bay
20	1	0.20494	0.207571	0.206662	0.228733	0.204132	0.175634	Medv
	2	0.070127	0.075884	0.071521	0.099804	0.070611	0.050759	Medv
	3	0.025211	0.031224	0.028736	0.050152	0.028393	0.016815	Medv
	4	0.0092	0.013808	0.012706	0.027574	0.012581	0.006067	Bay
	5	0.003375	0.006428	0.006001	0.016165	0.005967	0.002326	Bay
	6	0.00124	0.003112	0.00297	0.009938	0.002972	0.000933	Bay
	7	0.000456	0.001556	0.001522	0.006334	0.001536	0.000388	Bay
	8	0.000168	0.000798	0.000801	0.004152	0.000817	0.000166	Bay
	9	6.17E-05	0.000419	0.00043	0.002782	0.000445	7.27E-05	Bay
	10	2.27E-05	0.000224	0.000236	0.001899	0.000247	3.25E-05	Bay
30	1	0.20494	0.201199	0.199645	0.214985	0.198811	0.178601	Mle
	2	0.070127	0.06934	0.066386	0.087034	0.066587	0.051639	Mle
	3	0.025211	0.026673	0.025343	0.040501	0.025556	0.016841	Mom
	4	0.0092	0.010993	0.010612	0.020688	0.010722	0.00595	Bay
	5	0.003375	0.004772	0.004762	0.011346	0.004801	0.002237	Bay
	6	0.00124	0.002163	0.002256	0.006591	0.00226	0.000887	Mle
	7	0.000456	0.001017	0.001117	0.004017	0.001107	0.000368	Bay
	8	0.000168	0.000495	0.000573	0.00255	0.000561	0.000159	Bay
	9	6.17E-05	0.000248	0.000303	0.001678	0.000292	7.14E-05	Bay

تابع جدول(2)

	10	2.27E-05	0.000128	0.000165	0.00114	0.000155	3.32E-05	Bay
50	1	0.20494	0.21299	0.213991	0.223164	0.21459	0.199127	Bay
	2	0.070127	0.076354	0.074255	0.089689	0.074853	0.064259	Medv
	3	0.025211	0.029919	0.028287	0.039855	0.028534	0.022739	Bay
	4	0.0092	0.012369	0.011454	0.018897	0.011516	0.00853	Bay
	5	0.003375	0.005322	0.004868	0.009431	0.00486	0.003345	Bay
	6	0.00124	0.002364	0.002156	0.004924	0.002131	0.00136	Bay
	7	0.000456	0.001079	0.000992	0.002684	0.000966	0.00057	Bay
	8	0.000168	0.000504	0.000472	0.001529	0.000451	0.000245	Bay
	9	6.17E-05	0.00024	0.000233	0.000912	0.000217	0.000108	Bay
	10	2.27E-05	0.000117	0.000118	0.000571	0.000107	4.85E-05	Bay
الطريقة	bay	mle	mom	medv	المجموع			
عدد حالات الأفضلية	26	5	3	6	40			

جدول رقم (3) يبين قيم متوسط مربعات الخطأ لجميع الطرائق وأحجام العينات المستخدمة في تجربة المحاكاة للحالة الأولى

n	t	mle	mom	nls	medv	bay	best
10	1	0.01055	0.012131	0.010916	0.0137	0.015060955	mle
	2	0.003073	0.003206	0.005368	0.003426	0.002971754	bay
	3	0.000928	0.000877	0.002928	0.000928	0.000495383	bay
	4	0.000314	0.000276	0.001653	0.00029	8.22611E-05	bay
	5	0.000115	9.72E-05	0.000965	0.000101	1.46315E-05	bay
	6	4.46E-05	3.67E-05	0.000588	3.79E-05	2.94155E-06	bay
	7	1.79E-05	1.46E-05	0.000377	1.49E-05	6.84584E-07	bay
	8	7.47E-06	6.02E-06	0.000253	6.1E-06	1.81617E-07	bay
	9	3.22E-06	2.58E-06	0.000177	2.59E-06	5.2938E-08	bay

تابع جدول(3)

	10	1.43E-06	1.15E-06	0.000129	1.14E-06	1.63793E-08	bay
20	1	0.005452	0.005766	0.005669	0.005489	0.006728088	mle
	2	0.002104	0.002189	0.003456	0.002009	0.001832495	bay
	3	0.000702	0.000725	0.001902	0.000664	0.000379103	bay
	4	0.000229	0.000238	0.000959	0.000222	7.42367E-05	bay
	5	7.44E-05	7.93E-05	0.000467	7.62E-05	1.47809E-05	bay
	6	2.43E-05	2.68E-05	0.000227	2.66E-05	3.06675E-06	bay
	7	7.99E-06	9.21E-06	0.000112	9.46E-06	6.64775E-07	bay
	8	2.66E-06	3.23E-06	5.63E-05	3.41E-06	1.49459E-07	bay
	9	8.92E-07	1.16E-06	2.92E-05	1.25E-06	3.45191E-08	bay
	10	3.03E-07	4.26E-07	1.55E-05	4.64E-07	8.1233E-09	bay
30	1	0.003318	0.003698	0.003557	0.004069	0.004152539	mle
	2	0.001261	0.001353	0.001838	0.001421	0.001298613	mle
	3	0.000393	0.000421	0.000948	0.000439	0.000288539	bay
	4	0.00012	0.000132	0.00046	0.000137	6.02274E-05	bay
	5	3.76E-05	4.33E-05	0.000219	4.4E-05	1.31333E-05	bay
	6	1.22E-05	1.47E-05	0.000106	1.46E-05	3.12352E-06	bay
	7	4.08E-06	5.15E-06	5.3E-05	4.95E-06	8.13008E-07	bay
	8	1.41E-06	1.85E-06	2.79E-05	1.72E-06	2.27673E-07	bay
	9	5.08E-07	6.89E-07	1.56E-05	6.1E-07	6.72114E-08	bay
	10	1.88E-07	2.65E-07	9.17E-06	2.22E-07	2.05908E-08	bay
50	1	0.002323	0.002712	0.003066	0.003017	0.002452868	mle
	2	0.000971	0.000906	0.001367	0.000937	0.000869477	bay
	3	0.000323	0.000274	0.000602	0.000276	0.000229024	bay
	4	9.87E-05	7.86E-05	0.000241	7.82E-05	5.51718E-05	bay
	5	2.92E-05	2.22E-05	9.16E-05	2.18E-05	1.31904E-05	bay
	6	8.57E-06	6.25E-06	3.42E-05	6.07E-06	3.22109E-06	bay
	7	2.52E-06	1.77E-06	1.29E-05	1.69E-06	8.07287E-07	bay
	8	7.44E-07	5.08E-07	4.94E-06	4.73E-07	2.06774E-07	bay
	9	2.22E-07	1.47E-07	1.95E-06	1.33E-07	5.38136E-08	bay
	10	6.68E-08	4.29E-08	7.93E-07	3.74E-08	1.41638E-08	bay
الطريقة	bay	mle	mom	medv	المجموع		
عدد حالات الأفضلية	35	5	0	0	40		

جدول رقم (4) يبين قيم دالة المعولية الحقيقية والمقدرة لجميع الطرائق وأحجام العينات المستخدمة في تجربة المحاكاة للحالة الثانية

N	t	real	mle	mom	nls	medv	bay	best
10	1	0.367879	0.353914	0.356062	0.377134	0.371278	0.301601	medv
	2	0.135335	0.124001	0.120557	0.164411	0.125528	0.072676	medv
	3	0.049787	0.048428	0.046124	0.080583	0.047583	0.020311	mle
	4	0.018316	0.020656	0.019575	0.043396	0.020069	0.006432	mom
	5	0.006738	0.009433	0.00901	0.025187	0.009206	0.002244	mom
	6	0.002479	0.004549	0.004425	0.015544	0.004511	0.000845	mom
	7	0.000912	0.002293	0.002291	0.010101	0.002332	0.000339	bay
	8	0.000335	0.0012	0.001241	0.00686	0.001259	0.000143	bay
	9	0.000123	0.000648	0.000698	0.004841	0.000706	6.3E-05	bay
	10	4.54E-05	0.00036	0.000405	0.003532	0.000408	2.88E-05	bay
20	1	0.367879	0.351654	0.353454	0.366131	0.35886	0.326903	mle
	2	0.135335	0.119011	0.116163	0.146013	0.117558	0.088938	mle
	3	0.049787	0.04308	0.041221	0.063303	0.041485	0.026089	mle
	4	0.018316	0.016529	0.015742	0.029534	0.015854	0.008205	mle
	5	0.006738	0.006634	0.006385	0.01465	0.006465	0.002722	mle
	6	0.002479	0.002758	0.00272	0.007655	0.002775	0.000941	mom
	7	0.000912	0.001179	0.001206	0.004185	0.001239	0.000337	bay
	8	0.000335	0.000516	0.000553	0.002383	0.000571	0.000124	bay
	9	0.000123	0.00023	0.000261	0.001407	0.00027	4.64E-05	mle
	10	4.54E-05	0.000105	0.000126	0.000859	0.00013	1.78E-05	bay
30	1	0.367879	0.372582	0.375143	0.379829	0.382651	0.359116	nls
	2	0.135335	0.141281	0.137336	0.1603	0.139736	0.11904	mom
	3	0.049787	0.055652	0.052912	0.072029	0.053432	0.040854	mom
	4	0.018316	0.022733	0.021562	0.034314	0.021655	0.014601	mom
	5	0.006738	0.009579	0.009239	0.017198	0.009258	0.005406	bay
	6	0.002479	0.004142	0.004132	0.009	0.004143	0.002062	bay

تابع جدول(4)

	7	0.000912	0.00183	0.001915	0.004885	0.001927	0.000806	bay
	8	0.000335	0.000824	0.000915	0.002734	0.000925	0.000321	bay
	9	0.000123	0.000377	0.000448	0.001571	0.000456	0.00013	bay
	10	4.54E-05	0.000175	0.000224	0.000922	0.00023	5.37E-05	bay
50	1	0.367879	0.36136	0.358994	0.358331	0.362942	0.35304	me dv
	2	0.135335	0.1316	0.130977	0.145893	0.132483	0.117965	me dv
	3	0.049787	0.049607	0.050512	0.063542	0.051034	0.040665	mle
	4	0.018316	0.019321	0.020525	0.029309	0.020712	0.014514	mle
	5	0.006738	0.007746	0.008724	0.014201	0.008789	0.005348	mle
	6	0.002479	0.003187	0.003855	0.007187	0.003873	0.002028	bay
	7	0.000912	0.001343	0.001763	0.003786	0.001763	0.000791	bay
	8	0.000335	0.000579	0.00083	0.002071	0.000825	0.000316	bay
	9	0.000123	0.000255	0.000402	0.001174	0.000395	0.00013	bay
	10	4.54E-05	0.000115	0.000199	0.00069	0.000193	5.45E-05	bay
الطريقة	bay	mle	mom	medv	nls	المجموع		
عدد حالات الأفضلية	18	10	7	4	1	40		

جدول رقم (5) يبين قيم متوسط مربعات الخطأ لجميع الطرائق وأحجام العينات المستخدمة في تجربة المحاكاة للحالة الثانية

n	t	mle	mom	nls	medv	bay	best
10	1	0.016668	0.018285	0.014516	0.022994	0.025134	nls
	2	0.006528	0.006768	0.008114	0.00764	0.008118	mle
	3	0.002024	0.002016	0.004442	0.002222	0.00159	bay
	4	0.000643	0.000629	0.002342	0.000687	0.000277	bay
	5	0.000217	0.000215	0.001231	0.000233	4.87E-05	bay
	6	7.72E-05	7.94E-05	0.000666	8.5E-05	9.28E-06	bay
	7	2.86E-05	3.11E-05	0.000378	3.28E-05	1.99E-06	bay
	8	1.09E-05	1.28E-05	0.000228	1.33E-05	4.81E-07	bay
	9	4.32E-06	5.51E-06	0.000145	5.61E-06	1.28E-07	bay
	10	1.76E-06	2.46E-06	9.7E-05	2.46E-06	3.63E-08	bay

تابع جدول(5)

20	1	0.006745	0.007847	0.006957	0.011145	0.009566	mle
	2	0.003304	0.003442	0.003485	0.003692	0.004637	nls
	3	0.000926	0.000935	0.001589	0.000955	0.001033	mle
	4	0.000225	0.000228	0.00068	0.000232	0.000182	bay
	5	5.35E-05	5.69E-05	0.000284	5.83E-05	2.93E-05	bay
	6	1.29E-05	1.5E-05	0.00012	1.53E-05	4.57E-06	bay
	7	3.2E-06	4.16E-06	5.19E-05	4.19E-06	7.07E-07	bay
	8	8.03E-07	1.2E-06	2.37E-05	1.17E-06	1.1E-07	bay
	9	2.04E-07	3.55E-07	1.14E-05	3.32E-07	1.74E-08	bay
	10	5.25E-08	1.08E-07	5.85E-06	9.49E-08	2.83E-09	bay
30	1	0.004802	0.005401	0.005066	0.00766	0.005661	mle
	2	0.0025	0.00259	0.003148	0.002783	0.002561	mle
	3	0.000884	0.000953	0.001765	0.000943	0.000678	bay
	4	0.000266	0.00031	0.000818	0.000302	0.000145	bay
	5	7.44E-05	9.66E-05	0.000344	9.45E-05	2.9E-05	bay
	6	2.01E-05	2.97E-05	0.000139	2.94E-05	5.71E-06	bay
	7	5.34E-06	9.05E-06	5.55E-05	9.11E-06	1.13E-06	bay
	8	1.41E-06	2.76E-06	2.23E-05	2.82E-06	2.3E-07	bay
	9	3.69E-07	8.41E-07	9.12E-06	8.75E-07	4.75E-08	bay
	10	9.68E-08	2.58E-07	3.81E-06	2.72E-07	1E-08	bay
50	1	0.003268	0.003265	0.003224	0.004209	0.003785	nls
	2	0.001784	0.001983	0.001993	0.002139	0.001979	mle
	3	0.000576	0.000737	0.001106	0.000778	0.00054	bay
	4	0.000159	0.000235	0.0005	0.000246	0.00012	bay
	5	4.21E-05	7.25E-05	0.000206	7.5E-05	2.54E-05	bay
	6	1.12E-05	2.23E-05	8.27E-05	2.26E-05	5.49E-06	bay
	7	3.02E-06	6.9E-06	3.39E-05	6.82E-06	1.24E-06	bay
	8	8.35E-07	2.16E-06	1.45E-05	2.06E-06	2.95E-07	bay
	9	2.37E-07	6.91E-07	6.6E-06	6.31E-07	7.36E-08	bay
	10	6.86E-08	2.25E-07	3.19E-06	1.95E-07	1.9E-08	bay
الطريقة	bay	mle	mom	nls	المجموع		
عدد حالات الأفضلية	31	6	0	3	40		

جدول رقم (6) يبين قيم دالة المعولية الحقيقية والمقدرة لجميع الطرائق وأحجام العينات المستخدمة في تجربة المحاكاة للحالة الثالثة

n	t	real	mle	mom	nls	medv	bay	best
10	1	0.497426	0.503498	0.505274	0.502411	0.521615	0.465974	nls
	2	0.195971	0.183225	0.186628	0.229096	0.197523	0.116907	medv
	3	0.073743	0.068509	0.07184	0.110746	0.075806	0.030431	medv
	4	0.027347	0.027127	0.030029	0.057787	0.031328	0.00861	mle
	5	0.01009	0.011318	0.013617	0.032358	0.014042	0.002629	mle
	6	0.003716	0.004942	0.006656	0.019298	0.006804	0.000859	mle
	7	0.001368	0.002247	0.00348	0.012168	0.003538	0.000298	nls
	8	0.000503	0.00106	0.00193	0.008056	0.001957	0.000109	bay
	9	0.000185	0.000517	0.001127	0.005565	0.001141	4.19E-05	bay
	10	6.81E-05	0.00026	0.000686	0.003989	0.000695	1.68E-05	bay
20	1	0.497426	0.485336	0.482508	0.476809	0.480178	0.474382	mle
	2	0.195971	0.182894	0.184169	0.212955	0.184048	0.147111	medv
	3	0.073743	0.068993	0.070962	0.098018	0.07094	0.045374	mom
	4	0.027347	0.027048	0.028647	0.047286	0.028659	0.014753	mle
	5	0.01009	0.011063	0.012172	0.023931	0.012198	0.005078	mle
	6	0.003716	0.004712	0.00543	0.012677	0.005456	0.001844	mle
	7	0.001368	0.002083	0.002532	0.007007	0.002553	0.000704	bay
	8	0.000503	0.000954	0.001227	0.004026	0.001242	0.000281	bay
	9	0.000185	0.000451	0.000615	0.002395	0.000625	0.000117	bay
	10	6.81E-05	0.00022	0.000317	0.001469	0.000324	5.05E-05	bay

تابع جدول(6)

30	1	0.497426	0.492465	0.494885	0.489182	0.495387	0.488194	medv
	2	0.195971	0.190081	0.186996	0.208669	0.187553	0.166565	mle
	3	0.073743	0.072429	0.070312	0.090103	0.070641	0.05539	mle
	4	0.027347	0.028143	0.027544	0.040612	0.027732	0.01882	medv
	5	0.01009	0.011202	0.01136	0.019284	0.011459	0.006576	mle
	6	0.003716	0.004563	0.004945	0.00969	0.004992	0.00236	mle
	7	0.001368	0.001899	0.002272	0.005164	0.002291	0.000867	mle
	8	0.000503	0.000805	0.001099	0.002919	0.001104	0.000326	bay
	9	0.000185	0.000347	0.000558	0.001746	0.000557	0.000125	bay
	10	6.81E-05	0.000152	0.000296	0.001098	0.000292	4.84E-05	bay
50	1	0.497426	0.495894	0.497305	0.492384	0.497389	0.494741	medv
	2	0.195971	0.19616	0.194712	0.210479	0.194721	0.18181	mle
	3	0.073743	0.075482	0.074665	0.089555	0.074574	0.064289	medv
	4	0.027347	0.029228	0.029128	0.038915	0.029081	0.022874	medv
	5	0.01009	0.011482	0.011645	0.01735	0.011634	0.008272	mle
	6	0.003716	0.004584	0.004771	0.007932	0.004775	0.003047	bay
	7	0.001368	0.001859	0.002001	0.003713	0.002008	0.001142	bay
	8	0.000503	0.000765	0.000857	0.001776	0.000863	0.000435	bay
	9	0.000185	0.000319	0.000375	0.000866	0.000379	0.000168	bay
	10	6.81E-05	0.000135	0.000167	0.00043	0.000169	6.61E-05	bay
	bay	mle	mom	medv	nls	المجموع		
	15	14	1	8	2	40		

جدول رقم (7) يبين قيم متوسط مربعات الخطأ لجميع الطرائق وأحجام العينات المستخدمة في تجربة المحاكاة للحالة الثالثة

n	t	mle	mom	nls	medv	bay	best
10	1	0.019747	0.020954	0.016749	0.031097	0.028731	nls
	2	0.009635	0.009782	0.010484	0.013915	0.013551	mle
	3	0.002739	0.002954	0.005781	0.00364	0.002891	mle
	4	0.000709	0.000975	0.003083	0.001053	0.00049	bay
	5	0.000192	0.000373	0.001643	0.000378	7.7E-05	bay
	6	5.56E-05	0.000158	0.000898	0.000156	1.19E-05	bay
	7	1.72E-05	7.12E-05	0.000515	7.01E-05	1.85E-06	bay
	8	5.57E-06	3.37E-05	0.000313	3.32E-05	2.98E-07	bay
	9	1.87E-06	1.66E-05	0.0002	1.63E-05	5.02E-08	bay
	10	6.47E-07	8.34E-06	0.000134	8.26E-06	8.97E-09	bay
20	1	0.006486	0.00701	0.006787	0.010798	0.008657	mle
	2	0.004027	0.003983	0.003901	0.004467	0.006101	nls
	3	0.001454	0.001489	0.002525	0.001522	0.00174	mle
	4	0.000439	0.000496	0.00132	0.000494	0.00036	bay
	5	0.00013	0.000164	0.000616	0.000163	6.85E-05	bay
	6	3.92E-05	5.47E-05	0.000276	5.45E-05	1.33E-05	bay
	7	1.23E-05	1.83E-05	0.000123	1.83E-05	2.8E-06	bay
	8	3.97E-06	6.12E-06	5.59E-05	6.17E-06	6.43E-07	bay
	9	1.31E-06	2.05E-06	2.6E-05	2.08E-06	1.59E-07	bay
	10	4.44E-07	6.85E-07	1.24E-05	7.02E-07	4.13E-08	bay
30	1	0.005921	0.006956	0.007059	0.008227	0.007166	mle
	2	0.003617	0.00379	0.003657	0.004099	0.004404	mle
	3	0.001157	0.00129	0.001823	0.001374	0.001193	mle
	4	0.000302	0.000398	0.000833	0.000421	0.000242	bay
	5	7.45E-05	0.000128	0.000372	0.000135	4.38E-05	bay
	6	1.81E-05	4.39E-05	0.00017	4.56E-05	7.61E-06	bay
	7	4.36E-06	1.58E-05	8.16E-05	1.61E-05	1.31E-06	bay
	8	1.05E-06	5.88E-06	4.12E-05	5.84E-06	2.27E-07	bay
	9	2.54E-07	2.25E-06	2.17E-05	2.16E-06	3.99E-08	bay
	10	6.12E-08	8.74E-07	1.19E-05	8.1E-07	7.16E-09	bay

تابع جدول(7)

50	1	0.002461	0.002799	0.003002	0.003775	0.00277	mle
	2	0.001478	0.001564	0.001652	0.001597	0.001691	mle
	3	0.000576	0.000682	0.001041	0.000666	0.000579	mle
	4	0.000173	0.000221	0.00046	0.000216	0.000142	bay
	5	4.58E-05	6.27E-05	0.000168	6.18E-05	3E-05	bay
	6	1.14E-05	1.69E-05	5.61E-05	1.68E-05	5.95E-06	bay
	7	2.72E-06	4.45E-06	1.78E-05	4.47E-06	1.15E-06	bay
	8	6.39E-07	1.16E-06	5.56E-06	1.18E-06	2.21E-07	bay
	9	1.48E-07	3.03E-07	1.73E-06	3.12E-07	4.28E-08	bay
	10	3.41E-08	7.91E-08	5.37E-07	8.27E-08	8.34E-09	bay
الطريقة	bay	mle	mom	medv	nls	المجموع	
عدد حالات الأفضلية	28	10	0	0	2	40	

المصادر

1-Gupta, R.D.and Kundu, D. (1999)."Generalized Exponential Distribution", Australian and New Zealand Journal of Statistics, vol. 41, pp.173-188.

2-Gupta, R.D. and Kundu, D. (2001a)."Exponentiated Exponential Distribution; An Alternative to Gamma and Weibull Distributions", Biometrical J. 43(1), pp117-130.

3- Mudholkar, G.S. and Srivastava, D.K.(1993)," Exponentiated Weibull Family for Analyzing Bathtub Failure Data", IEEE Transactions of Reliability,vol.42,299-302.

4- Gupta, R.D. and Kundu, D. (2007). "Generalized Exponential Distribution: existing Methods and some recent Developments ",Journal of Statistical Planning and Inference,vol 137,no. 11,3537-3547.

5- Draper,N.R and Smith,H.,1981."Applied Regression Analysis", John-Wiley&Sons.Inc.

6-Afify, E.E,2004. "Linear and Nonlinear Regression of Exponential Distribution".http://ip.statjournals,net :2002/index stat/index/Nov04.html.pdf

7- Gupta, R.D. and Kundu, D. (20)."Generalized Exponential Distribution: Bayesian Estimations ",by e-Mail.

ملحق رقم (1)

```
%%%Main Program of Generalized Exponential
Reliability Estimation%%
n=50;
elpha=1;
lemda=1;
a=0;
b=0;
c=0;
d=0;
Q=1000;
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
for q=1:Q
for i1=1:n
    t(i1,q)=(-1/lemda)*log(1-(rand)^(1/elpha));
    fi(i1,q)=(i1/(n+1));
    wj(i1,q)=((n+2)*(n+1)^2)/(i1*(n-i1+1));
end
Y=t(:,q);
x01=[mean(Y);mean(Y)];
s1(:,q)= fsolve(@(x) ge_mleg(x,Y,n),x01);
elpha_mle(q)=s1(1,q);%mle estimator of elpha
lemda_mle(q)=s1(2,q);%mle estimator of lemda
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
x0 = [mean(Y);mean(Y)];%initial values of k and elpha
mo(:,q) = fsolve(@(x) GE_mom(x,Y),x0);
elpha_mom(q)=mo(1,q);%moment estimator of elpha
lemda_mom(q)=mo(2,q);%moment estimator of lemda
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
v= -sum(((t(:,q)).*exp(-lemda_mle(q)*t(:,q)))./((1-exp(-
lemda_mle(q)*t(:,q)))));
```

```
w=(n/(lemda_mle(q)^2))+(elpha_mle(q)-
1)*sum(((t(:,q).^2).*exp(-lemda_mle(q)*t(:,q)))./((1-exp(-
lemda_mle(q)*t(:,q))).^2));
u=n/(elpha_mle(q)^2);
t11=-w/(u*w-v^2);
t12=v/(u*w-v^2);
t22=-u/(u*w-v^2);
a1=(2*n/(lemda_mle(q)^3))+(elpha_mle(q)-
1)*sum(((t(:,q).^3).*exp(-lemda_mle(q)*t(:,q)).*(1+exp(-
lemda_mle(q)*t(:,q))))./((1-exp(-lemda_mle(q)*t(:,q))).^3));
a2=sum(((t(:,q).^2).*exp(-lemda_mle(q)*t(:,q)))./((1-exp(-
lemda_mle(q)*t(:,q))).^2));
a3=sum(((3.*t(:,q).^2).*exp(-lemda_mle(q)*t(:,q)))./((1-
exp(-lemda_mle(q)*t(:,q))).^2));
p1(q)=((d-1)/elpha_mle(q))-c ;%bayes estimator of elpha
p2(q)=((b-1)/lemda_mle(q))-a ;%bayes estimator of
lemda
elpha_bay(q)=elpha_mle(q)+0.5*((2*n/(elpha_mle(q)^3)*t
11^2)+a1*t12*t22-
a2*(t22*t11+2*t12^2))+(p1(q))*t11+(p2(q))*t12;
lemda_bay(q)=lemda_mle(q)+0.5*((2*n/(elpha_mle(q)^3)*
t11*t12)+a1*t22^2-a3*(t22*t12))+((d-1)/elpha_mle(q)-
c)*t12+((b-1)/lemda_mle(q)-a)*t22;
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
ys(:,q)=sort(t(:,q));
betahat(:,q)= nlinfit(fi(:,q),ys(:,q),@GEnonlinear,x0);
elpha_nls(q)=betahat(2,q);%nls estimator of elpha
lemda_nls(q)=betahat(1,q);%nls estimator of lemda
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
medv(:,q) = fsolve(@(x) GE_medv(x,Y),x0);
elpha_medv(q)=medv(1,q);%median estimator of
elpha/variance
lemda_medv(q)=medv(2,q);%median estimator of lemda
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
```

```
h=1:1:10;
elpha2(q)=elpha;
lemda2(q)=lemda;
R_real(q,:)=1-(1-exp(-lemda2(q)*h)).^elpha2(q);
R_mle(q,:)=1-(1-exp(-lemda_mle(q)*h)).^elpha_mle(q);
R_mom(q,:)=1-(1-exp(-
lemda_mom(q)*h)).^elpha_mom(q);
R_nls(q,:)=1-(1-exp(-lemda_nls(q)*h)).^elpha_nls(q);
R_medv(q,:)=1-(1-exp(-
lemda_medv(q)*h)).^elpha_medv(q);
R_bay(q,:)=1-(1-exp(-lemda_bay(q)*h)).^elpha_bay(q);
end
elpha_mean=[mean(elpha_mle) mean(elpha_mom)
mean(elpha_nls)  mean(elpha_medv)
mean(elpha_bay)]';
lemda_mean=[mean(lemda_mle) mean(lemda_mom)
mean(lemda_nls) mean(lemda_medv)
mean(lemda_bay)]';
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
for j1=1:Q
  mse1_mle(j1,:)=(R_real(j1,:)-R_mle(j1,:)).^2;
  mse1_mom(j1,:)=(R_real(j1,:)-R_mom(j1,:)).^2;
  mse1_nls(j1,:)=(R_real(j1,:)-R_nls(j1,:)).^2;
  mse1_medv(j1,:)=(R_real(j1,:)-R_medv(j1,:)).^2;
  mse1_bay(j1,:)=(R_real(j1,:)-R_bay(j1,:)).^2;
end
Reliability_of_Methods=[h' mean(R_real,1)'
mean(R_mle,1)' mean(R_mom,1)' mean(R_nls,1)'
mean(R_medv,1)' mean(R_bay,1)']
Mse_of_Methods=[mean(mse1_mle,1)'
mean(mse1_mom,1)'  mean(mse1_nls,1)'
mean(mse1_medv,1)'  mean(mse1_bay,1)']
sub functions
```

```
1-function F1=ge_mleg(x,t,n)
F1=[(n/x(1))+sum(log(1-exp(-x(2).*t)))
   (n/x(2))+(x(1)-1)*sum((t.*exp(-x(2).*t))./((1-exp(-
x(2).*t))))-sum(t)];
2-function F =GE_mom(x,z)
nn=mean(z);
mm=var(z);
F = [nn-(1/x(2))*(psi(0,abs(x(1)+1))-psi(0,1))
     mm+(1/(x(2)^2))*(psi(1,abs(x(1)+1))-psi(1,1))];
3-function yhat=GEnonlinear(beta,x)
b1=beta(1);
b2=beta(2);
yhat=-(1/b1)*log(1.-(x).^(1/b2));

4-function F =GE_medv(x,z)
nn=median(z);
mm=var(z);
F = [nn+(1/x(2))*log(1-(0.5)^(1/x(1)))
     mm+(1/(x(2)^2))*(psi(1,abs(x(1)+1))-psi(1,1))];
```

Generalized Exponential Distribution
A Comparison between Bayes and other Methods for Estimation of Reliability Function for Generalized Exponential Distribution

Dr.Nashaat Jasiam Mohammed*

ABSTRACT:

This paper is concerned with estimation of Reliability Function of the two parameter Generalized Exponential Distribution. A methods for estimating the two parameters of Generalized Exponential Distribution and its Reliability Function will be presented here, also an empirical study depends on simulated observations with different parameters values and samples sizes from Generalized Exponential Distribution was conducted, to compare between different methods depends on their mean square error and to show practically that the suggested methods work well in estimation of Reliability Function. It is shown that the Bayes and Maximum Likelihood Method is the best methods in the case of all samples sizes and parameters values used.

Technical College of Management *